INDICE

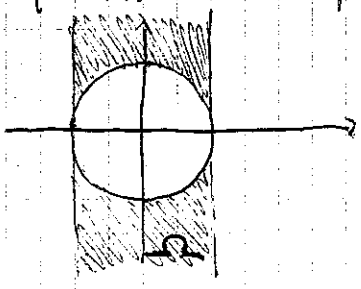
- INSIEMI PAG 1
- PIANO TANGENTE PAG 4
- LIMITI PAG 7
- DERIVATA DIREZIONALE PAG 9
- DIREZIONE DI MASSIMA PENDENZA PAG 9
- DIFFERENZIABILITÀ PAG 10
- VETTORE NORMALE PAG 12
- POTENZIALE DI UNA FORMA DIFFERENZIALE PAG 13
- PUNTI CRITICI PAG 15
- APPLICAZIONE TH DINI PAG 19
- INVERSIONE LOCALE PAG 19
- POLINOMIO DI TAYLOR PAG 21
- RIPASSO PER INTEGRALI PAG 23
- LUNGHEZZA DI UNA CURVA PAG 24
- INTEGRALE CURVILINEO PAG 26
- INTEGRALE DI CAMPO PAG 28
- AREA PAG 30
- VOLUME PAG 35
- INTEGRALE SU UN INSIEME PAG 37

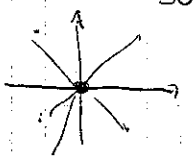
Master COPY COPISTERIA 050/3312126 388/9837745

1)

INSIEMI

1) 22-07-13: l'insieme ottenuto dalla striscia chiusa $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x\in[-1,1]\}$ togliendovi il cerchio unitario aperto $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2<1\}$ è:

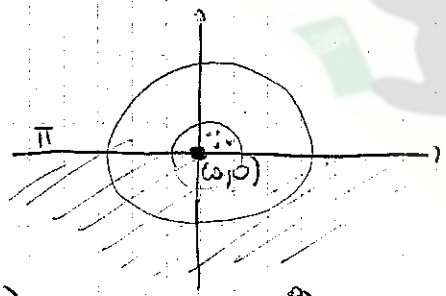


- aperto? $B(x_0,r)\subseteq\Omega$ → no
- chiuso? = complementare di un insieme aperto → no
- connesso? = ∃ una curva che congiunge ogni suo punto → sì
- semplicemente connesso? → connesso senza "buchi" → no
- stella? →  no. Insiemi a stella sempre semplicemente connessi.

2) 11-09-13; In $\mathbb{R}^2$ il pt $(0,0)$ per l'insieme $\{(\varphi,\sigma): \sigma\in[0,\pi],\ \varphi\in[\sigma,2\sigma]\}$ è:

È di accumulazione $(\forall r>0\ \exists x\in\Omega : |x-x_0|<r,\ x\neq x_0)$ perché comunque scelga $B(x_0,r)$, B contiene almeno un punto di $\Omega\neq(0,0)$.

$\underset{\downarrow}{[0,0]}\ \underset{\downarrow}{[\sigma,2\sigma]}$



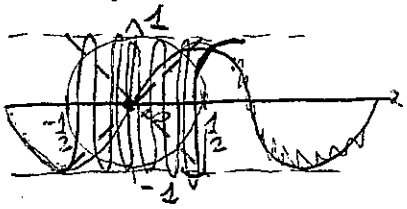
3) 11-01-13 l'insieme $\Omega=\{x\in\mathbb{R}^2 : 0<|x|<2\}$ è:

- Non è aperto perché $B(x_0,r)\subseteq\Omega$ non è vera $\forall x_0, r$
- Non è chiuso perché non contiene i punti di frontiera (manca lo 0)

  Insieme chiuso contiene • punti di frontiera, • punti di accumulazione
- Non è semplicemente connesso perché ha buchi nel dominio

⇒ né aperto né chiuso

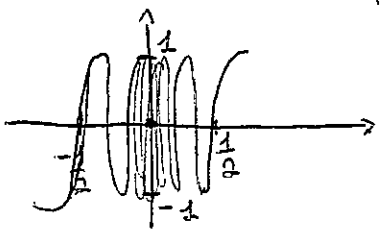
4) 19-06-12 L'insieme dei punti di accumulazione di $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x\neq 0,\ y=\sin(\frac{1}{x})\}$ è:



se $y>1$ e $y<-1$ non contiene pt dell'insieme

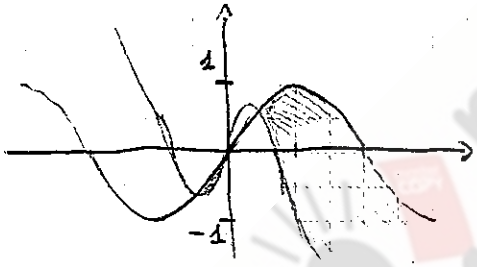
$\Rightarrow x=0$ e $y\in[-1,1]$

5) 18-07-12 Il pt $(0,0)$ per il grafico di $\sin(\frac{1}{x})$, $x\neq 0$ è:



$(0,0)$ è punto di accumulazione perché comunque scelgo $B(x_0,r)$ $B\subseteq$ punto di $\Omega\neq(0,0)$

6) 28-06-12 Il punto $(0,0)$ rispetto alla regione $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x-\frac{1}{6}x^3<y<\sin x\}$ è:



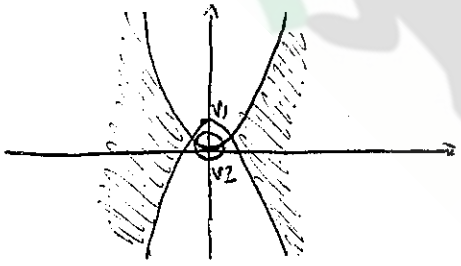
è di frontiera $\Rightarrow \forall r>0\ \ \Omega\cap B_r(x_0)\neq\emptyset\ \wedge$

$(\mathbb{R}^n/\Omega)\cap B_r(x_0)\neq\emptyset$ con $x_0\in\mathbb{R}^n$, $\Omega\subseteq\mathbb{R}^n$

ma non isolato $\Rightarrow \exists r>0 : B_r(x_0)\cap\Omega=x_0$

con $x_0\in\mathbb{R}^n$, $\Omega\subseteq\mathbb{R}^n$

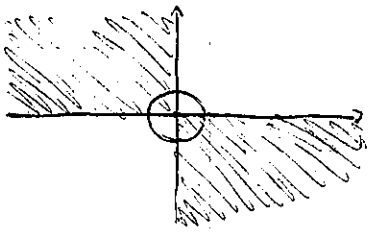
7) 6-08-12 Il punto $(0,0)$ rispetto all'insieme $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 1-x^2<y<x^4\}$ è:



è esterno $\Rightarrow \exists r>0 : B_r(x_0)\cap\Omega=\emptyset$

con $x_0\in\mathbb{R}^n$, $\Omega\subseteq\mathbb{R}^n$

8) 2-02-12 Il punto $(0,0)$ rispetto a $xy<0$ è:

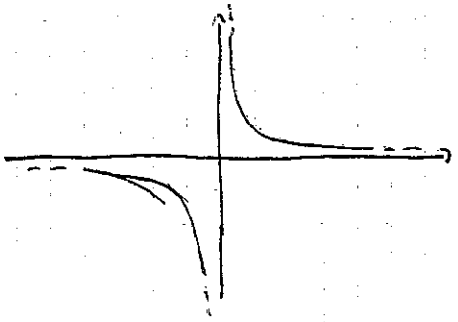


di frontiera, infatti per ogni raggio scelto la "palla" contiene sia punti dell'insieme che del complementare, e $(0,0)\notin$ all'insieme

master CASA 050/8312126 388/9837745

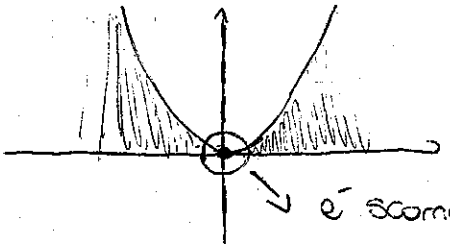
3

9) 15-09-15 L'insieme $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : xy = 1\}$ è:



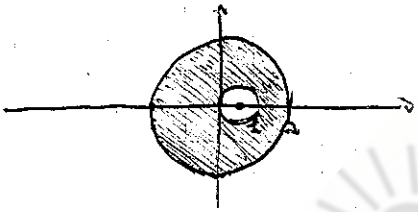
è chiuso (contiene la propria frontiera, in generale succede quando l'insieme contiene "il contorno", quindi quando ho $=, \leq, \geq$)

10) 20-07-11 L'insieme $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq 0,\ 0 \leq y \leq x^2\}$ è:



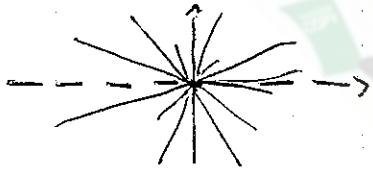
è sconnesso perché manca $x=0$, quindi il punto $(0,0)$

11) 24-02-11 L'insieme $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq 2,\ x^2+y^2-x > 0\}$



È connesso, ma non semplicemente (ha "buchi")

12) 29-01-14 L'insieme $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \neq 0\} \cup \{(0,0)\}$



è a stella con polo in $(0,0)$

13) 22-07-14 L'insieme $x^3+y^3+3x^2y-y=0$ è:

non vuoto perché ha soluzioni (ad esempio $(0,0)$)

14) 23-06-11 Il punto $(2,3)$ rispetto all'insieme $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 2x^2+y^2 < 1\}$ è

$2(4)+9 \overset{?}{<} 1 \quad 8+9 \not< 1 \Rightarrow$ esterno



15) 18-07-12 L'insieme ottenuto togliendo la bisettrice del I quadrante è:



è semplicemente connesso, ma anche a stella (tutti gli insiemi stella sono semplicemente connessi)

PIANO TANGENTE

a) Il piano tangente esiste solo se la curva è regolare, ovvero se $x, y, z \in C^1(\text{Dominio})$, quindi se la funzione è iniettiva.
Un modo semplice per verificarlo è calcolare il vettore normale $\phi_u \wedge \phi_v$ in x_0 e verificare che sia $\neq 0$.

b) Piano tangente a superficie cartesiana

$$z = \underbrace{f(x_0,y_0)}_{f(x_0)} + \underbrace{f_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f_y(x_0,y_0)(y-y_0)}_{\nabla f(x_0)(x-x_0)}$$

c) Piano tangente al sostegno di una superficie parametrica

- calcolo il vettore normale $\phi_u\begin{pmatrix}x_0\\y_0\end{pmatrix} \wedge \phi_v\begin{pmatrix}x_0\\y_0\end{pmatrix} = (\epsilon_1,\epsilon_2,\epsilon_3) \to$ se $=0$ sup non regolare
- sostegno = sostituisco $(\overline{x_0},\overline{y_0})$ in $f = (x_0,y_0,z_0)$

$\Rightarrow$ piano tangente = $\epsilon_1(x-x_0) + \epsilon_2(y-y_0) + \epsilon_3(z-z_0)$

1) 22-07-13 il piano tg al sostegno della superficie regolare $(u^3+v^3, u^3v^3, u^2+uv^2)$ in $(0,0,0)$ è:
↓ sostegno

$$d_u = \begin{pmatrix}3u^2\\3u^2v^3\\2u+\cancel{*}v^2\end{pmatrix} \text{ in } (0,0) = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases}u^3+v^3=0\\u^3v^3=0\\u^2+uv^2=0\end{cases} \to \text{sol} = (0,0)$$

$$d_v = \begin{pmatrix}3v^2\\3u^3v^2\\2uv\end{pmatrix} \text{ in } (0,0) = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \quad \Rightarrow \text{versore normale} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ il piano tangente non esiste perché la curva non è regolare

2) 22-07-13 Piano tg e versore normale del grafico di $(\cos x)^{\ln y}$ in $(0,1)$

$$f(x_0) = (\cos 0)^{\ln(1)} = 1, \quad \frac{d}{dx}(\cos x)^{\ln y} = (\ln y)(\cos x)^{(\ln y - 1)} = 0$$

$$\frac{d}{dy}(\cos x)^{\ln y} = (\cos x)^{(\ln y)}(\ln(\cos x)) \text{ in } (0,1) = 0$$

piano tg = $z = 1$